الإختبار الثاني في الرياضيات

السنة الثالثة شعبة العلوم التجريبية　　　　**المدة :3 ساعات**

التمرين الأول:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) معادلته:
$2x + y - 2z + 4 = 0$ و النقط $A(3, 2, 6)$; $B(1, 2, 4)$; $C(4, -2, 5)$

1) بين أن الجملة $\{(O, 3), (A ، 1), (B ، 1), (C ، 1)\}$ تقبل مرجحا G.

2) عين إحداثيتي I مركز ثقل المثلث ABC.

3) أثبت أن G منتصف [OI].

التمرين الثاني:

α و β عددان مركبان حيث :

$$\alpha = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\beta = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

1) أحسب β^2 ثم أكتب على الشكل المثلثي.

2) استنتج طويلة و عمدة β.

3) استنتج قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$.

4) أوجد طويلة و عمدة α.

5) أكتب علة الشكل الأسي العدد $(\alpha\beta)^{2008}$

التمرين الثالث:

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) المار بالنقطة

$A(1, -2, 1)$ و شعاعه الناظمي $\vec{n}(-2, 1, 5)$ و المستوي (P') الذي معادلته: $x + 2y - 7 = 0$

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوي (P).
2. أثبت أن المستوي (P) و (P') متعامدان.
3. بين أن تقاطع المستويين (P) و (P') هو مستقيم (d) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي.
4. أحسب المسافة بين النقطة $B(3, -2, -1)$ و كل من المستويين (P) و (P') .

التمرين الرابع:

I) f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O , \vec{i} , \vec{j})$

1. أوجد مجموعة تعريف الدالة f .
2. عين الأعداد a , b , c حيث : $f(x) = ax + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$ من أجل $x \in D_f$.
3. أدرس تغيرات الدالة f .
4. بين أن المستقيم $(d) : y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
5. أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (d) .
6. أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة -2 .
7. أنشئ المنحنى (C_f).
8. ناقش بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعدلة $f(x) = m + 1$.

II) لتكن الدالة g معرفة على المجال $] -1 , +\infty [$ حيث : $g(x) = -f(x)$

1. شكل جدول تغيرات الدال g .
2. استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C_g).
3. أنشئ (C_g) في نفس المعلم.

تهنياتنا لكم بالنجاح

مع تحيات أساتذة المادة:

لعرج لعراجي - جيلا لي مالك – بوعلام بن الزاير

ثانوية حمدان خوجة بالمشرية   ولاية النعامة

الإختبار الثاني الموضوع الثاني

التمرين الأول (3 نقط)

$(P) : 2x + y - 2z + 4 = 0$

$A(4,-2,5)$; $B(1,2,4)$;$C(3,2,6)$

1) نبين أن G مرجح الجملة: $\{ (O,3), (A,1) , (B,1) , (C,1)\}$

لدينا $3 + 1 + 1 + 1 \neq 0$ و منه G موجودة. 0.5

إحداثيتي G.

$X_G = \frac{3.0 + 1.3 + 1.1 + 1.4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$Y_G = \frac{3x0 + 1x2 + 1x2 + 1x\text{-}2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $G(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{2})$

$Z_G = \frac{3x0 + 1x6 + 1x4 + 1x5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ 1

2) إحداثيتي I مركز ثقل المثلث ABC.

$I(\frac{3+1+4}{3}, \frac{2+2-2}{3}, \frac{6+4+5}{3})$ $I(\frac{8}{3},\frac{2}{3},5)$ 1

3) نبين أن G منتصف **[OI]**.لتكن 'G منتصف **[OI]**.

$X_{G'} = \frac{0 + \frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$, $Y_{G'} = \frac{0 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$; $Z_{G'} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$

و منه $G = G'$ 0.5

التمرين الثاني 4 نقط

$\alpha = - 2 (\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12})$; $\beta = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

حساب β^2 ثم كتابته على الشكل المثلثي:

$\beta^2 = - 8\sqrt{3} - 8 i$ 1

$|\beta^2| = \sqrt{643 + 64} = \sqrt{464} = 2 . 8 = 16$ 0.25

$\cos\theta = - 8\frac{\sqrt{3}}{16} = - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta = - \frac{8}{16} = \frac{-1}{2}$

$\theta = 7\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 0.25

$\beta^2 = 16 (\cos 7\frac{\pi}{6} + i \sin 7\frac{\pi}{6})$, $\beta^2 = [16 , 7\frac{\pi}{6}]$

طويلة و عمدة β. ليكن $\beta = [r ، \theta]$ و منه $\beta^2 = [r^2 ، 2\theta]$

لدينا $] 16 , 7\frac{\pi}{6} [= [r^2 ، 2\theta]$ و منه

$r^2 = 16$ و $2\theta = 7\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $r = 4$ و $\theta = 7\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{2}$

لما $k = 0$ فإن $\theta = 7\frac{\pi}{12}$ و منه $\beta = [4 ; 7\frac{\pi}{12}]$ مرفوض

لما $k = 1$ فإن $\theta = 19\frac{\pi}{12}$ و منه $\beta = [4 ; 19\frac{\pi}{12}]$ 0.5

3) استنتاج قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$.

لدينا $\beta = \beta$ و منه :

$4 (\cos\frac{19\pi}{12} + i \sin\frac{19\pi}{12}) = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

و منه $\cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{19\pi}{12} = - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

0.50

4) طويلة و عمدة α :

$\alpha = 2 (\cos (\pi + \frac{\pi}{2}) + i \sin (\pi + \frac{\pi}{2})$ 0.25

$= 2 (\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin(\frac{13\pi}{12})$ 0.25

$| \alpha | = 2$, $\text{Arg}(\alpha) = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ 0.25+ 0.25

$\alpha\beta = 8 (\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin(\frac{13\pi}{12}))(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$

$= 8 (\cos(\frac{13\pi}{12} + \frac{19\pi}{12}) + i \sin (\frac{13\pi}{12} + \frac{19\pi}{12}))$

$= 8 (\cos\frac{32\pi}{12} + i \sin\frac{32\pi}{12}) = 8 (\cos\frac{8\pi}{3} + i \sin\frac{8\pi}{3})$

$(\alpha\beta)^{2008} = 8^{2008}(\cos\frac{16064\pi}{3} + i \sin\frac{16064\pi}{3})$

$= 8^{2008} (\cos (5354\pi+\frac{2\pi}{3})+i \sin(5354\pi+\frac{2\pi}{3}))$

$= 8^{2008} (\cos (\frac{2\pi}{3})+i \sin(\frac{2\pi}{3})) = 8^{2008} e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 0.5

التمرين الثالث 4 نقط

$(P') : x + 2y - 7 = 0$

1) معادلة (P) الذي يشمل $A(1, -2,1)$ و ناظمه $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM}$ و منه $\vec{n} . \overrightarrow{AM} = 0$ 0.5

و منه $(x - 1) (- 2) + (y+2)(1) + (z - 1)(5) = 0$

و منه $- 2x + y + 5z - 1 = 0$ و هي معادلة (P)   0.5

2) الناظمي للمستوي (P) هو $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ و للمستوي (P') $\vec{n}'\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 0.25

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ هو :   00.75

$1.(-2) + 2.1+0(5) = - 2 + 2 + 0 = 0$ و منه $(P) \perp (P')$

3) (P) و (P') ليس متطابقان

لدينا $\begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \\ y = t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = \frac{2(-2t+7) - t + 1}{5} \end{cases}$

و منه $\begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases}$ 0.25 + 0.5 + 0.25

التمرين الرابع 9 نقط

$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$

1) مجموعة التعريف: $D_f = \mathbb{R} - \{ - 1\}$ **0.5**

2) تعيين الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$

بالمطابقة نجد : $f(x) = \frac{ax^3 + 2ax^2 + (a+b)x + (b+c)}{(x+1)^2}$

و منه $a = 1$; $2a = 2$, $a + b = 0$; $b + c = 0$

$c = 1$; $b = 0 - 1$; $a = 1$ 1

3) دراست تغيرات الدالة f :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = - \infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = + \infty$ **0.25+ 0.25**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \; ; \; \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ **0.25+ 0.25**

المشتقة : من أجل كل عدد $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3+2x^2)}{(x+1)^4}$$

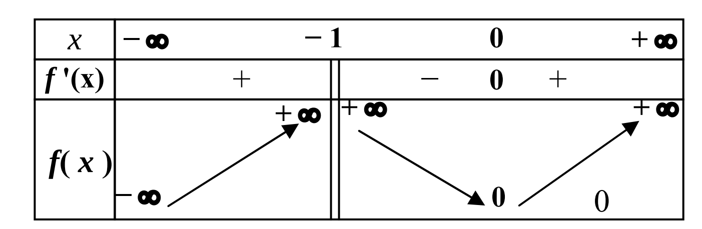
$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x^3+3x^2+4x^2+4x - 2x3 - 4x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x^3+3x^2+4x)}{(x+1)^4} = \frac{x(x+1)(x^2+3x+4)}{(x+1)^4}$$ **1**

إشارة المشتقة من نفس إشارة $x(x+1)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x (x+1)		+	0	−	0	+	

جدول التغيرات



x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0

4) نبين أن $(d) : y = x$ مقارب مائل. **0.5**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

و $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

5) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

$$f(x) - x = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2}$$ **0.25**

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x (x+1)	+	‖	+	0	−
	C_f فوق (d) **0.75**	‖	C_f فوق (d)		C_f أسفل (d)

6) معادلة المماس عند -2 .

0.5 $y = 4(x+2) = 4x + 8$

0.5 7) انشاء المنحنى البياني (C_f)

المناقشة البانية:

لما $m + 1 < 0$ أي $m<-1$ المعادلة تقبل حلا واحدا

0.5 لما $m + 1 = 0$ أي $m= -1$ المعادلة تقبل حلين

لما $m + 1 > 0$ أي $m > -1$ المعادلة تقبل 3 حلول

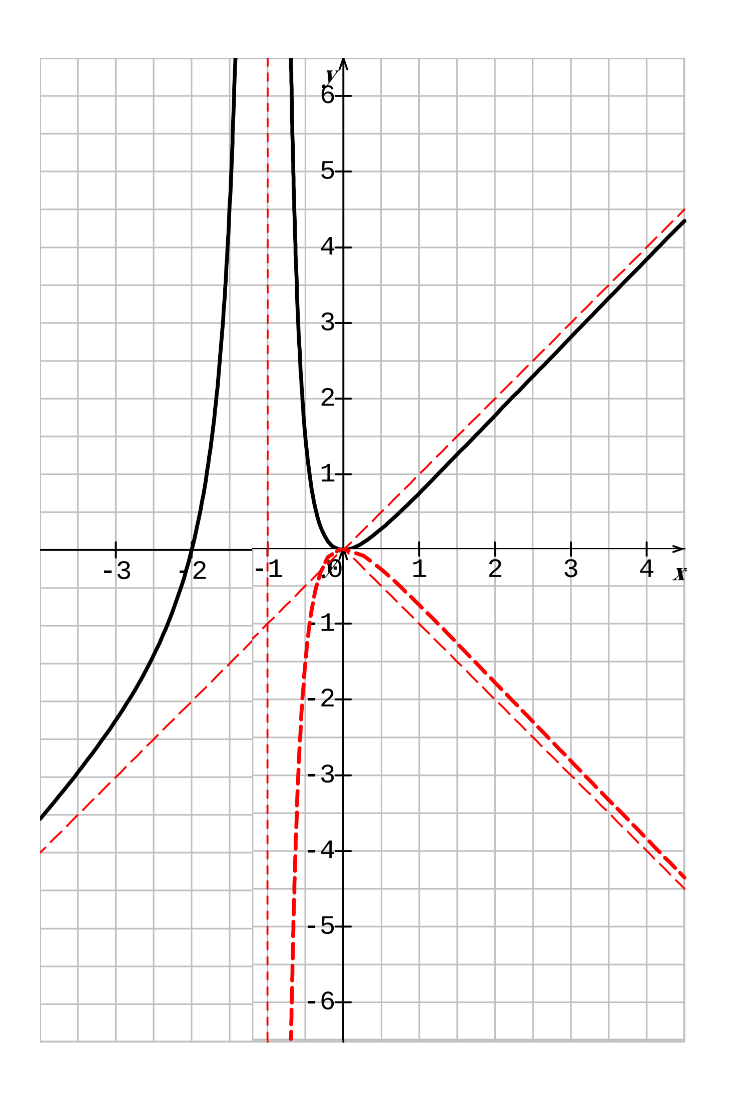
II) لدينا $g(x) = -f(x)$

1) جدول تغيرات g. **0.5**

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+		−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

2) المستقيمات المقاربة :

لدينا $x = -1$ و $y = -x$ **0.5**



الأستاذ لعرج لعراجي